Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-2**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades **22-12-2006**

Solucionario del Examen Final de Cálculo Numérico (MB535)

Sólo se permite el uso de una hoja de formulario

Problema 1

a) Encuentre un spline cuadrático para los siguiente puntos:

x	0	1	2
y	0	1	0

Se sabe que debe satisfacer: y'(0)=1

Solución

Sea las funciones Spline:

$$S_0(x) = a_0 t^2 + b_0 t + c_0$$
$$S_1(x) = a_1 (t-1)^2 + b_1 (t-1) + c_1$$

Planteando las correspondiente condiciones de spline se tendrá:

$$S(t) = \begin{cases} 0 \le t \le 1 & t \\ 1 \le t \le 2 & -2(t-1)^2 + (t-1) + 1 = -2t^2 + 5t - 2 \end{cases}$$

b) Se tiene el siguiente sistema:

$$\dddot{x} - \cos(\dot{x}) * t - \sin(x) = 0$$
$$x(0) = 1 \qquad \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0 \qquad 0 \le t \le 15$$
$$h = 1e^{-3}$$

Complete las líneas, para resolver este sistema usando el método de Euler por Matlab:

```
function [x,y]=eulerp(df,xo,xf,yo,h)
close all
x=xo:h:xf;
x=x';
n=length(x);
y=yo;
for i=1:n-1

yo=yo+________________________________;

    y=[y;yo];
end
plot(x,y)
```

y la función que representa la derivada será:

```
function dydx=df1(t,y)

dydx=[_____________________________________________];
```

Desde la ventana de comando de matlab:

```
>> ________________________________________[enter]
```

Solución

Sea:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} \qquad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x2 \\ x3 \\ \cos(x2)*t + sin(x1) \end{bmatrix}$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

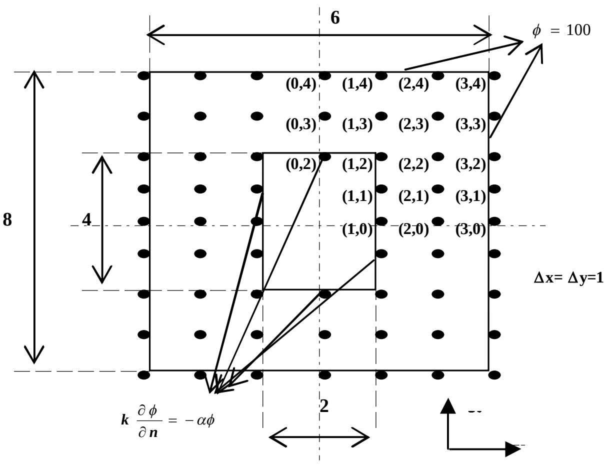
```
function [x,y]=eulerp(df,xo,xf,yo,h)
close all
x=xo:h:xf;
x=x';
n=length(x);
y=yo;
for i=1:n-1
    yo=yo+h*feval(df,x(i),yo);
    y=[y;yo];
end
plot(x,y)
```

```
function dydx=df1(t,y)
dydx=[y(2) y(3) cos(y(2))*t+sin(y(1))];
```

```
>> eulerp('df1',0,15,[1 0 0],0.001)
```

c) Considere la placa descrita en la figura. La temperatura externa de su superficie es mantenida en *100 °C* en cuanto a las paredes internas está sujetas a convección representada por la condición de contorno $k\dfrac{\partial\phi}{\partial n} = -\alpha\phi$, donde *k=1* y *α=1*. Sabiendo que el proceso de conducción de calor en el interior es regido por la ecuación:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$



y considerando a discretización mostrada en la figura, escriba a la forma discretizada de las ecuaciones en los nodos (0,2), (1,2), (1,1) y (2,0) indicados en la figura.

Solución

$T_{ext} = 100^{o}C \;\; T_{\text{int}} : \dfrac{d\phi}{dn} = -\phi \;\; \phi = u$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

Punto (0,2)
De ecuación de Laplace:
$u_{o3} + u_{12} + u_{01} + u_{-12} - 4u_{02} = 0$
Por convección
$\dfrac{d\phi}{dy} = \dfrac{u_{0,1} - u_{0,3}}{2h} = -u_{0,2} \quad h = \Delta y = 1 \Rightarrow u_{01} - u_{03} = -2u_{0,2} \Rightarrow u_{01} = u_{03} - 2u_{0,2}$
Por simetría
$u_{12} = u_{-12}$
Aplicando lo anterior en ec. de Laplace quedaría:
$2u_{03} + 2u_{12} - 6u_{02} = 0$
Punto (1,2)
De ecuación de Laplace:
$u_{13} + u_{22} + u_{11} + u_{02} - 4u_{12} = 0$

Punto (1,1)
De ecuación de Laplace:
$u_{12} + u_{21} + u_{01} + u_{10} - 4u_{11} = 0$
Por convección
$\dfrac{d\phi}{dx} = \dfrac{u_{21} - u_{01}}{2h} = -u_{11} \quad h = \Delta x = 1 \Rightarrow u_{01} - u_{21} = 2u_{11} \Rightarrow u_{01} = u_{21} + 2u_{11}$

Aplicando lo anterior en ec. de Laplace quedaría:
$2u_{21} + u_{12} + u_{10} - 2u_{11} = 0$

Punto (2,0)
De ecuación de Laplace:
$2u_{21} + 100 + u_{10} - 4u_{20} = 0$

Problema 2

Sea la siguiente función : $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, la cual se ha tabulado :

X	0.25	0.50	0.75	1
F(x)	0.2449	0.4613	0.6302	0.7468

a) Aproxime f(0.60) haciendo uso de todos los puntos de la tabla anterior mediante un polinomio interpolante de Newton basado en diferencias finitas.
b) Aproxime f(0.60) evaluando la integral usando la cuadratura de Gauss-Legendre con n=2.
c) Si el valor exacto de f(0.60) es 0.5352, evalué los errores obtenido en a) y b) e indique cual de las aproximaciones es mejor y porque razón.

Solución

a) Polinomio interpolante:

x	f(x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0.25	0.2449			
		0.2164		
0.50	0.4613		-0.0475	
		0.1689		-0.0048
0.75	0.6302		-0.0523	
		0.1166		
1.00	0.7468			

$$P(s) = 0.2449 + 0.2164s - 0.0475\frac{s(s-1)}{2} - 0.0048\frac{s(s-1)(s-2)}{6}$$

$$s = \frac{x-0.25}{0.25}$$

$$s = \frac{0.60-0.25}{0.25} = 1.4$$

$$P(s = 1.4) = 0.5348$$

Tambien :

$P(x) = -0.0512\, x^3 - 0.3032\, x^2 + 1.1154\, x - 0.0142$

$P(0.60) = 0.5348$

b)

Haciendo el cambio de variable: $t = \frac{3}{10}(x+1)$

$I = c_1\, f(x_1) + c_2\, f(x_2)$

$I = f(-0.5774) + f(0.5774)$

$I = 0.5350$

c)

Errores :

Newton = 0.0004

Gauss = 0.0002

Las dos aproximaciones se puede considerar buenas, aunque la cuadratura de Gauss da resultados ligeramente mejores.

Problema 3
Considere un sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente al movimiento de una nave viajando entre la luna y la tierra:

$$(E_1) \qquad \begin{cases} \ddot{x}_1 = 2\dot{x}_2 + x_1 - \eta \dfrac{x_1+\mu}{d_1^{\,3}} - \mu \dfrac{x_1-\eta}{d_2^{\,3}} \\ \ddot{x}_2 = -2\dot{x}_1 + x_2 - \eta \dfrac{x_2}{d_1^{\,3}} - \mu \dfrac{x_2}{d_2^{\,3}} \end{cases}$$

siendo $d_1 = \|(x_1+\mu, x_2)\|$ y $d_2 = \|(x_1-\eta, x_2)\|$ las distancias a la tierra y la luna.

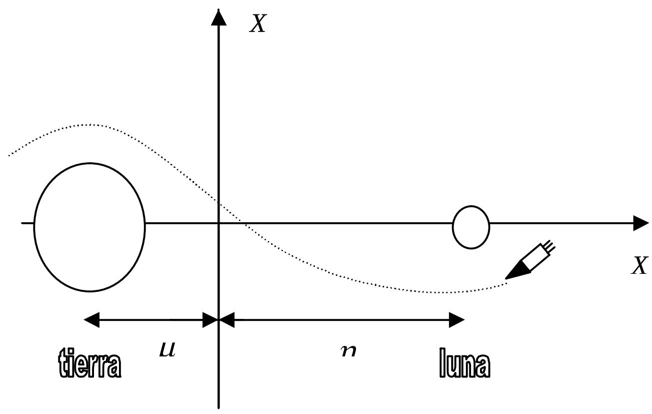
La posición es (x_1, x_2) en un sistema de coordenadas que se mueve con el sistema tierra-luna (El primer eje atraviesa la tierra y la luna y el segundo eje es perpendicular en el plano de movimiento del satélite). La tierra está en $(-\mu, 0)$ y la luna en $(\eta, 0)$ siendo $\mu = 82.45^{-1}$ la proporción de masas luna/tierra y $\eta = 1-\mu$.
En el instante inicial $t = t_0$ están dadas la posición (x_1, x_2) y la velocidad (v_1, v_2).

a) Escriba el sistema (E_1) en la forma

$$(E_2) \qquad \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

siendo $y = (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$.

b) Obtener y(0.2) aplicando el método de Euler con h=0.1. Use el vector de condiciones iniciales y0 correspondiente a salir de la posición $(x_1, x_2) = (1.2, 0)$ con velocidad $(v_1, v_2) = (0, -0.8)$



Solución:
(a)
Sea

$w_1(t) = x_1(t)$

$w_2(t) = x_1'(t)$

$w_3(t) = x_2(t)$

$w_4(t) = x_2'(t)$

Luego

$w_1'(t) = w_2(t)$

$$w_2'(t) = 2w_4(t) + w_1(t) - \eta \frac{w_1(t)+u}{\|(w_1(t)+\mu, w_3)\|^3} - \mu \frac{w_1(t)-\eta}{\|(w_1(t)-\eta, w_3)\|^3}$$

$w_3'(t) = w_4(t)$

$$w_4'(t) = -2w_2(t) + w_3(t) - \eta \frac{w_3(t)}{\|(w_1(t)+\mu, w_3)\|^3} - \mu \frac{w_3(t)}{\|(w_1(t)-\eta, w_3)\|^3}$$

Condiciones Iniciales

$w_1(t_0) = x_1$
$w_2(t_0) = v_1$
$w_3(t_0) = x_2$
$w_4(t_0) = v_2$

(b)
Método de Euler

0	**1.2000**	**0**	**0**	**-0.8000**
0.1000	**1.2000**	**-0.1342**	**-0.0800**	**-0.8000**
0.2000	**1.1866**	**-0.2631**	**-0.1600**	**-0.7684**

Problema 4
Suponga que *a,b,f* son funciones suficientemente suaves, y que *a* y *b* son funciones positivas. Considere el problema:

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(x)}{dx}\right)+b(x)u(x) = f(x) \quad , \; x \in [0,1]$$
$$u(0) = 0$$
$$u'(1) + \alpha u(1) = \beta$$

$a(x) = 1 + x^2$
$b(x) = 4$
$f(x) = -2$
$\alpha = 1$
$\beta = 3$

h=0.25
Encuentre:
a) Las ecuaciones de las diferencias finitas
b) La solución aproximada
c) Si la solución exacta es $u(x) = x^2$, encuentre el error porcentual cometido. Comente su respuesta.

Solución

$$-\frac{da(x)}{dx}\frac{du(x)}{dx} - a(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} + b(x)u(x) = f(x)$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{1}{a(x)}\frac{da(x)}{dx}\frac{du(x)}{dx} + \frac{b(x)}{a(x)}u(x) - \frac{1}{a(x)}f(x)$$
$a(x) = 1 + x^2$
$$\frac{da(x)}{dx} = 2x$$
$b(x) = 4$
$f(x) = -2$
$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{2x}{1+x^2}\frac{du(x)}{dx} + \frac{4}{1+x^2}u(x) + \frac{2}{1+x^2}f(x)$$
$$p(x) = -\frac{2x}{1+x^2}; \qquad q(x) = \frac{4}{1+x^2} \qquad r(x) = \frac{2}{1+x^2}$$
$A_i = 1 + h/2\, p(x_i)$ i=1,2,3,4
$B_i = -\left(2 + h^2 q(x_i)\right)$ i=1,2,3,4

$C_i = 1 - h/2\, p(x_i)$ i=1,2,3,4

$D_i = h^2 r(x_i)$ i=1,2,3,4

Para i=1,2,3:

$A_i u_{i-1} + B_i u_i + C_i u_{i+1} = D_i$

Para i=4

$A_4 u_3 + B_4 u_4 + C_4 u_5 = D_4$

Y

$u'(1) + u(1) = 3$

$\frac{u_5 - u_3}{2(1/4)} + u_4 = 3$

$2u_5 - 2u_3 + u_4 = 3$

$u_5 = u_3 - \frac{1}{2} u_4 + \frac{3}{2}$

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 \\ 0 & 0 & (A_4 + C_4) & (B_4 - C_4/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 - \frac{3}{2} C_4 \end{bmatrix}$$

Reemplazando valores

AA=	**-2.23529**	**1.0588**	**0**	**0**	**BB=** **0.117647**
	0.9	**-2.2**	**1.1**	**0**	**0.1**
	0	**0.88**	**-2.16**	**1.12**	**0.08**
	0	**0**	**2**	**-2.6875**	**-1.625**

$\mathbf{u_i}$	**u(x)**	**Error (%)**
0	**0**	**0**
0.105208451182261	**0.0625**	**0.68**
0.333217841384772	**0.25**	**0.33**
0.67126513180224	**0.5625**	**0.19**
1.10419730738771	**1**	**0.1**

Los Profesores